

ふわっと君が「ふわっと」落ちるわけを理論で考えてみよう

新藤孝敏

1. はじめに

[ふわっと君の動画](#)をご覧になりましたか。なぜ「ふわっと君」は、銅板上に「ふわっと」落ちるのでしょうか。[「ふわっと君」の解説書](#)には、銅板の中に渦電流が流れて、その渦電流が作る磁界により、磁石（永久磁石）に重力とは逆の上向きの反発力が働いてゆっくり落ちると説明されています。それでは、その反発力はどこで働いて、どの程度の大きさなのでしょう。これから、それを理論的に検討してみましよう。

なお、「一歩先へ」には、磁石が銅板上に落ちる様子を詳しく測定した結果が紹介されています。

[「銅板上へ落下する磁石の運動を測定してみよう」](#)

本稿の4章でいう実験結果とは、上記の実験結果ですので、できればこちらを先にご覧下さい。

(専門家の方々への注：以下に示すのは磁石や銅板の大きさや厚さ、材料による透磁率の違い等は無視した簡略化した考察です。)

2. 円形状電流もしくは、円盤状磁石の作る磁界

まず、磁石の作る磁界を計算しておきましょう。

図1に示す、半径 r の円形状電流もしくは半径 r の円盤状磁石による中心軸上の磁界の強さを考えます。磁界の強さ $H(x)$ [単位：A/m、アンペア毎メートル] は次式 (1) で計算できます。ⁱ

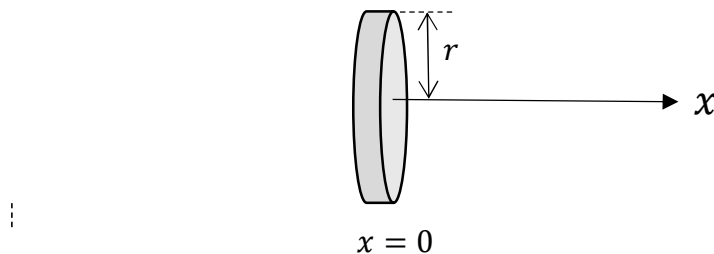


図1 円盤状磁石

$$H(x) = k_1 \frac{r^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

ただし、電流もしくは磁石の位置を $x = 0$ としています。また k_1 は磁石が作る磁界の強さなどで決まる定数です。

ここで(1)式で、磁石が作る磁界の強さなどによらない部分(半径 r と距離 x だけで決まる部分)を、 $f(x) = \frac{r^2}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ とおきます。ふわっと君の磁石は直径38[mm]です

ので、 $r = 19$ [mm]として、 $f(x)$ の x に対する変化様相を図示したものが図2です。これを見ると、磁石の直径程度以上磁石から離れると、磁界の強さはかなり弱くなることが判ります。

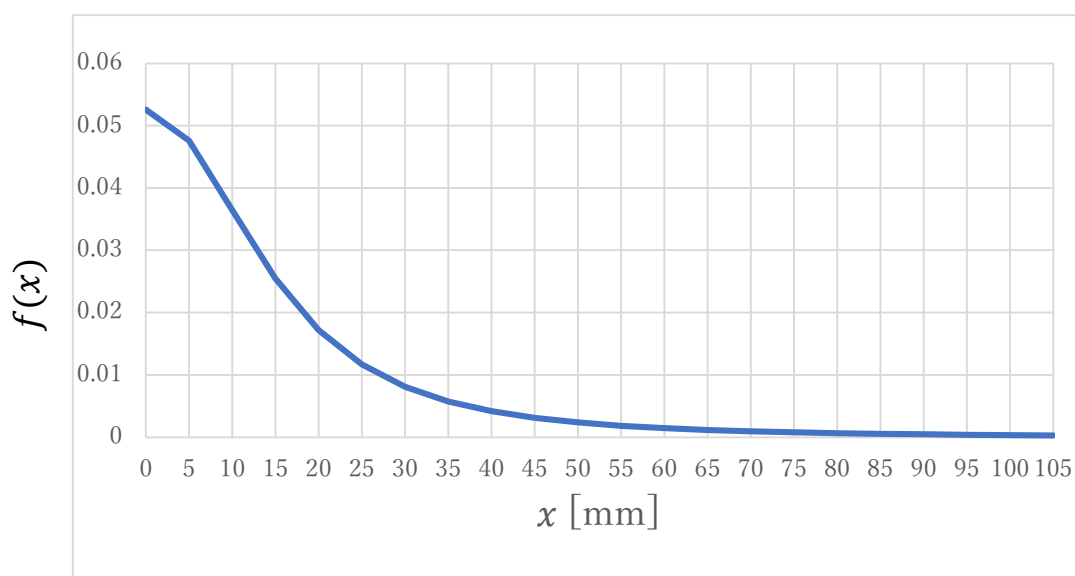


図2 中心軸上で磁界が変化する姿

以下では、この軸上の磁界の特性を用いて検討を進めます。なお、磁界の強さと同じような言葉で磁束密度という言葉があります。磁束密度は物質中の磁界の強さを表すもので、磁界と磁束密度は定性的には同じものと考えて構いません。ⁱⁱ

3. 落下する磁石に働く力

図3は、銅板に落ちる磁石の距離(高さ)が x である一瞬をとらえたものです。

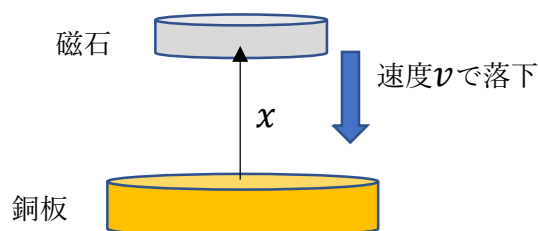


図3 銅板に落下する磁石

このような状況のもと、磁石に働く力を考えるため、まず磁石によって銅板内に流れる渦電流を考えます。次に、その渦電流によって生じる磁界が、落ちてくる磁石に働く力を考えます。以下では、磁石のN極が下側にあるものとします。

3. 1 磁石によって銅板内に流れる渦電流

磁石が落下している時には銅板部分の磁界は変化します。この変化によって銅板中には電圧が誘起され、円状の渦電流が流れます。

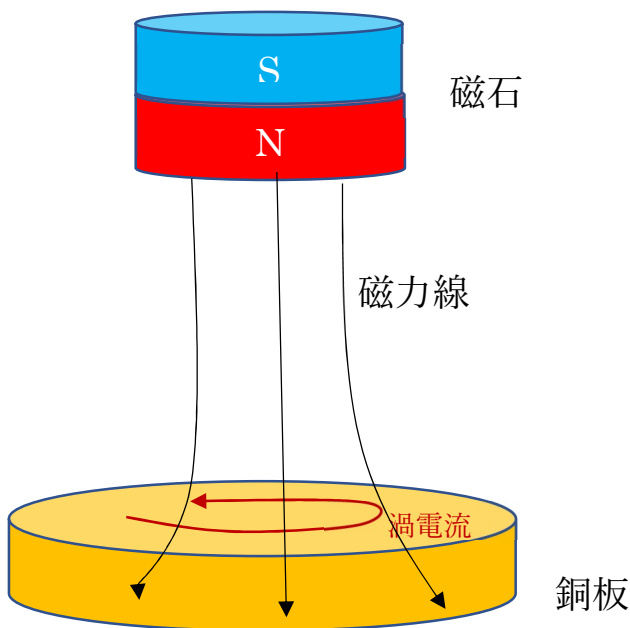


図4 銅板に流れる渦電流（磁力線、渦電流はイメージ）

この渦電流の大きさは銅板中の磁束密度 B の単位時間あたりの変化 $\frac{dB}{dt}$ に比例します。

磁石と銅板の距離 x が変われば、図2にあるように磁界の強さも変わります。磁束密度 B の単位時間あたりの変化 $\frac{dB}{dt}$ は、①磁石と銅板の距離 x が変わるとどのくらい磁界が変わるかということと、②磁石と銅板の距離 x が時間 t によってどのくらい変わるかという、二つのことで決まります。式で表すと以下のようになります。

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dB}{dx} \frac{dx}{dt}$$

x が変わるとどのくらい磁界が変わるか

磁石と銅板の距離 x が時間によってどのくらい変わるか

右辺の第1項は図2のカーブの傾きなので、 $f(x)$ を微分すれば求められます。第2項は磁石の落下速度 v です。つまり銅板内に流れる渦電流の大きさは、 $f'(x) \cdot v$ に比例するものとみなせます。ただし、 $f'(x)$ は、 $f(x)$ を x で微分した関数です。

3. 2 銅板内に流れる渦電流による磁界が磁石に及ぼす力

銅板内に流れる渦電流を、半径 r の円状電流とみなすとすれば、その作る磁界は図5のような形で、中心軸上での大きさは図2のように変化します、

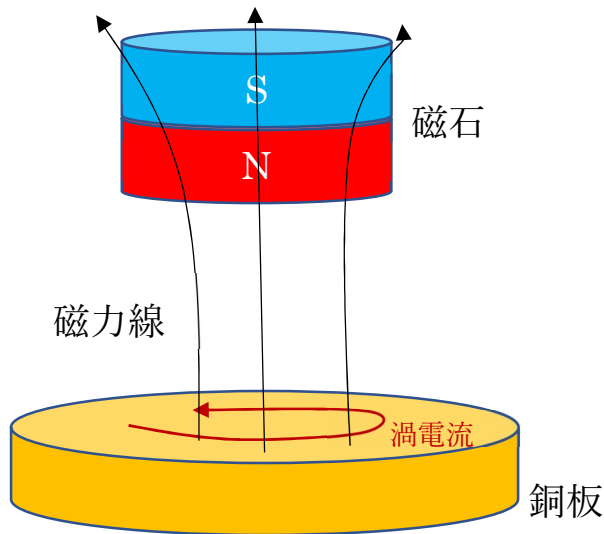


図5 銅板内に流れる渦電流の作る磁界（磁力線、渦電流はイメージ）

この磁界は磁石のN極には反発力として作用します。しかし、磁石にはS極があり、これには吸引力として作用します。すると、これらの力は相殺されてゼロになるのでしょうか。ここで重要なのが、銅板内の渦電流からの距離 x が大きくなると、図2にあるように磁界の強さは弱くなることです。磁石の厚みを考えると、N極の方がS極より渦電流に近いので、磁界が大きく、働く力も大きくなるので、結果的に磁石には反発力が働きます。

磁石の位置を x 、磁石の厚みを $2d$ とすると、N極に働く反発力は $f(x-d)$ に比例し、S極に働く吸引力は $f(x+d)$ に比例するものと考えられます。図6にあるように

$$f(x-d) - f(x+d) \approx f'(x) \cdot 2d$$

ですので、結局、トータルとしての反発力は $f'(x)$ に比例すると考えられます。

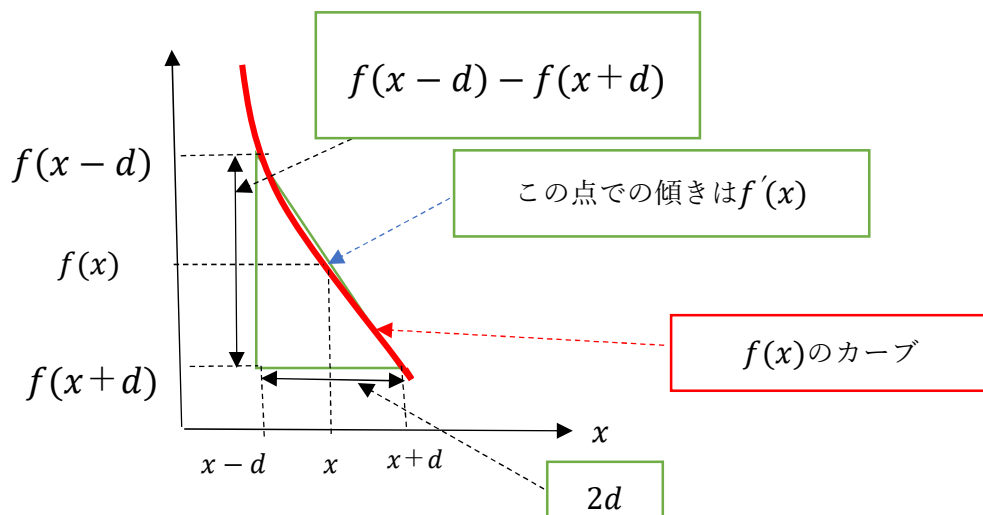


図6 $f(x-d) - f(x+d) \approx f'(x) \cdot 2d$ の説明のためのグラフ

3. 3 磁石に働く反発力

上記を総合すると、落下する磁石に働く反発力は、 $f'(x) \cdot f'(x) \cdot v$ に比例するものと考えられます。したがって、磁石の運動方程式は、 m を磁石の質量、 α を磁石の加速度、 g を重力加速度、 k を比例定数として次式になります。

$$-m\alpha = -mg + k\{f'(x)\}^2 \cdot v$$

つまり加速度 $\alpha = \frac{dx^2}{dt^2}$ は次の式で表現できます。

$$\alpha = g - K\{f'(x)\}^2 \cdot v \quad (2)$$

ただし、 $K (= \frac{k}{m})$ は定数です。

4. 解析結果

(2) 式から解析的に解を求めるのは困難なので、数値計算で解くことにしました。具体的方法ですが、まず位置、速度の初期条件から(2)式により加速度を求めます。これらの値から、ある時間ステップ後の位置や速度を計算します。新たに得られた位置や速

度の値を使って加速度を再計算して、次の時間ステップ後の位置や速度を計算します。このようなプロセスを繰り返して、長い時間にわたる位置や速度の変化を計算しました。

実験条件に合わせて、初期条件は時間 $t = 0$ [s] で、位置 $x = 105$ [mm]、速度 $v = 0$ [m/s] としました。（位置 x は銅板からの高さで表しています。）時間ステップは 1 [ms] ($=0.001$ [s] $=1.0 \times 10^{-3}$ [s]) としました。重要なのが K の値ですが、これは厳密には、銅板内の渦電流の大きさと分布、その渦電流が空間に作る磁界分布を考慮して算出しなければなりません。しかし、その解析は非常に難解なので、ここでは簡単のため、実験結果との比較から K を 0.00004 として計算を行いました。（注）

計算結果が図7、図8です。図7、図8を実験結果と比べてみれば明らかなように、実験結果とほぼ同様の特性が得られており、 K の値も含め、これまでの仮定が妥当なものであると言えます。

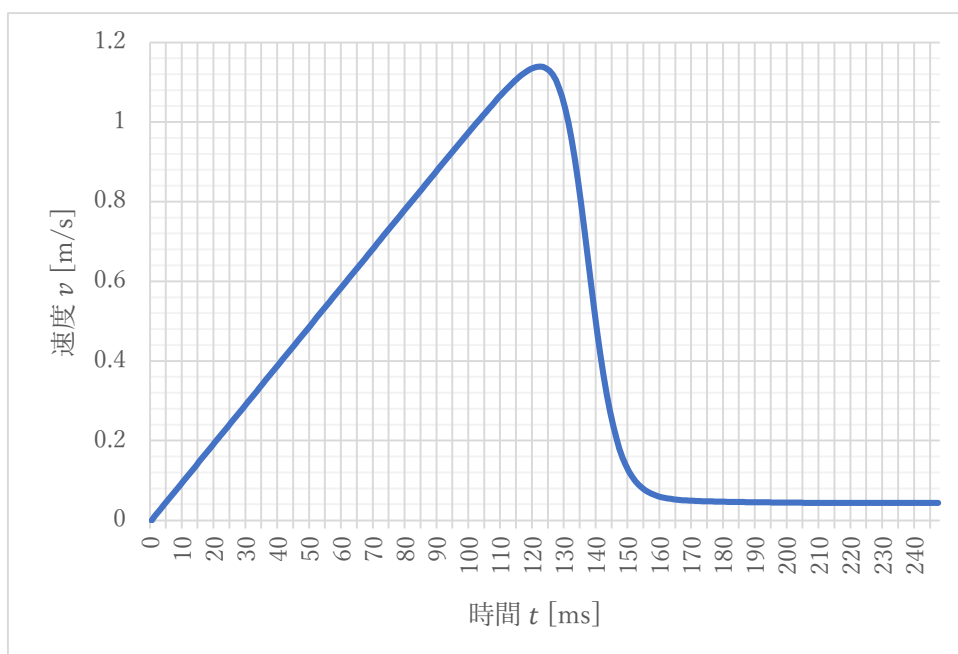


図7 落下速度の時間変化

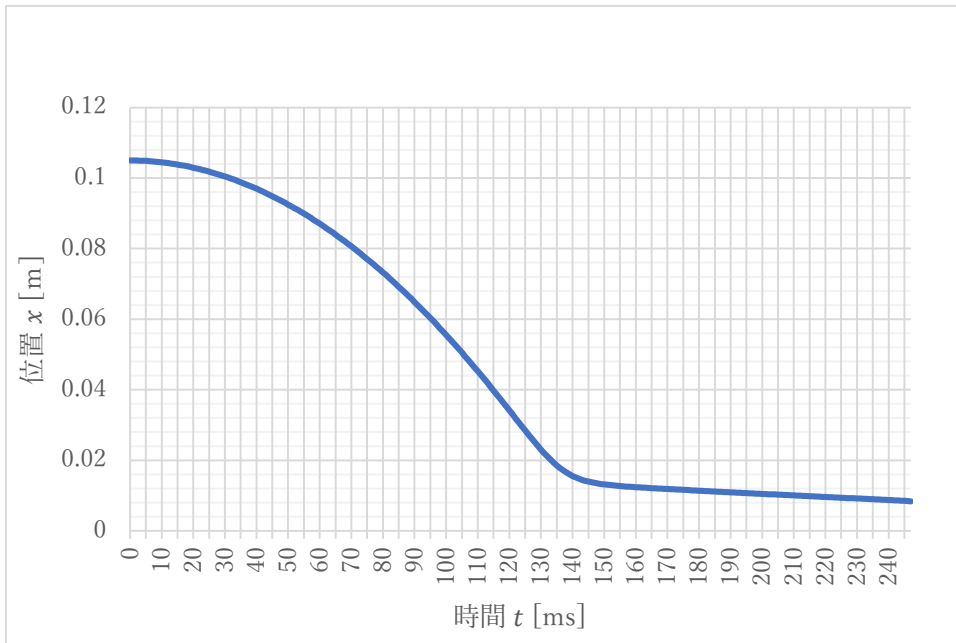


図8 磁石の位置の時間変化

図9は(2)式の第2項で表される反発力の大きさを磁石の位置に対して示したものです。この縦軸で9.8のところは重力と同じになります。

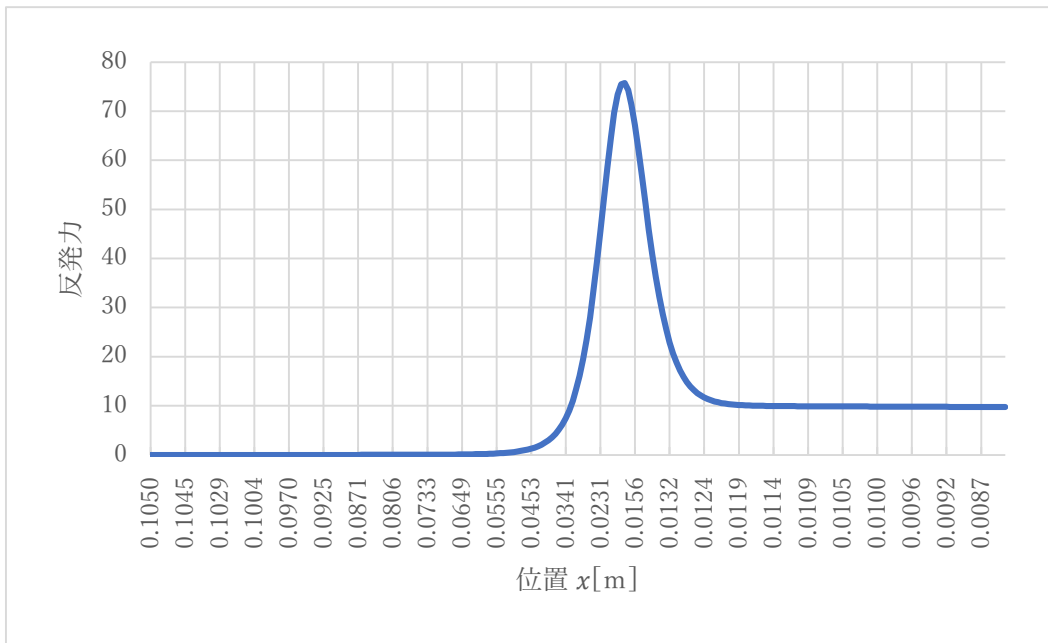


図9 磁石の位置と反発力の関係

銅板から1~3[cm]の位置で、最大で重力の7倍程度の強い反発力が生じていることが判ります。この反発力で磁石の落下速度は急激に減少します。一方、銅板から1[cm]程度に

近づくと、反発力は重力と同程度になり、平衡状態となっていることが判ります。ただし平衡状態といっても磁石が空間にじっと浮かんでいるわけではなく、その直前の速度から、加速も減速もせず一定速度で落下している状態です。この速度は、それ以前よりもかなり低速ですので、「ふわっと」落ちるのです。

5. まとめ

磁石が銅板の上に落下するときの挙動を、単純化したモデルで検討したところ、計算で求められた磁石の挙動は実験結果とよく一致した結果が得られました。銅板に流れる渦電流による反発力は磁石が銅板から1～3 [cm]の領域で最大となりました。これは、図2の軸上の磁界の空間変化が最も大きい領域に対応しており、反発力が生じるには磁石と銅板の距離によって磁界が大きく変化することが重要であることが判りました。

さらに、最終段階では落下速度は非常に低速となり、ふわっと落ちることも判りました。

注) 先進核融合・物理教育研究所の御手洗氏は、導体板を流れる渦電流がドーナツ状に流れると仮定したモデルを用いて、落下する磁石の挙動の詳細な定量的解析を行われています(私信)。ただ、それはかなり複雑なモデルなので、ここでは定性的な特性の把握を目的に、簡略化したモデルを用いて検討を行いました。

謝辞

本稿をまとめるにあたり、桂井誠先生、相知政司先生、久保等先生、大来雄二氏をはじめとして、多くの方々に貴重なご示唆、コメントを戴きました。上記の方々に心よりお礼を申し上げます。

原稿提出 2022年2月23日

再提出 2022年3月14日

ⁱ 詳しくは、石川 「改訂電気磁気学演習」 学献社 などをごらん下さい。

ⁱⁱ 磁界と磁束密度について、もっと詳しく知りたい方は、例えば次の本をご覧ください。
『電気磁気学 [3版改訂]』 山田直平原著 桂井誠改訂著 電気学会